Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Abril 1999

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ____

MA-2112—Segundo Parcial, Enero - Abril 1999 —

Por razones técnicas, no se incluye dibujos. Se ha abreviado el enunciado de ciertas preguntas.

1. Las funciones g, h : *R* $\to$ *R* son continuas. Sea

$$I = \int_0^1 dx \int_{2x}^{4-2x} g(2x-y)h(2x+y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{2x}^{4+2x} g(2x-y)h(2x+y)dy$$

   a) Dibuje la región de integración.

   b) Si se conoce $\int_0^4 h(t)dt = 3$ y $\int_{-4}^0 g(t)dt = 7$ calcule el valor de I.
   (Ayuda: cambio de variables).

   SOLUCIÓN: Se ve que x varía entre -1 y 1. Para x fijo entre 0 y 1, y varía entre $2x$ y $4-2x$, es decir las cotas inferiores y superiores son las rectas $y = 2x$ y $y = 4-2x$. De manera semejante, para x entre -1 y 0, las cotas son las rectas $y = -2x$ y $y = 4+2x$. La región de integración es pues el paralelogramo encerrado por las cuatro rectas $y = 2x,\ y = 4-2x,\ y = 4+2x,\ y = -2x$.
   Se hace el cambio de variables (obvio) $u = 2x-y,\ v = 2x+y$. Despejando x y y, se tiene $x = (u+v)/4,\ y = (v-u)/2$. El Jacobiano es

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

   que da $J = 1/4$. La región de integración original es la imagen del rectángulo R^* encerrado por las rectas $u = 0,\ v = 4,\ u = -4,\ v = 0$. Por consiguiente, se tiene

$$I = \iint_{R^*} g(u)h(v) \cdot \frac{1}{4} du dv$$

   que es

$$\frac{1}{4}\int_{-4}^0 g(u)du \int_0^4 h(v)dv$$

   y este vale $21/4$, usando los datos.
   Errores comunes:

   - Hacer mal el cambio de variables, olvidando la necesidad de meter el Jacobiano, o usando el inverso del Jacobiano.
   - Manteniendo la división de I en suma después del cambio de variables. Es innecesario y no se tiene los datos para hacer los cálculos.

2. Sea Ω el sólido definido mediante

$$x^2+y^2+z^2 \leq 4a^2 \text{ y } x^2+y^2+2ay \leq 0$$

Calcule el volumen de Ω.
SOLUCIÓN: Por definición de las integrales triples, el volumen buscado es

$$V = \iiint_{\Omega} dV$$

Se procede a calcular la integral triple como integral iterada.
La ecuación $x^2+y^2-2ay=0$ define un cilindro sobre la circunferencia en el plano xy que tiene la misma ecuación. Completando el cuadrado en la ecuación da $x^2+(y-a)^2=a^2$, lo que demuestra que se trata de una circunferencia con centro $(0,a)$ y radio a. La región Ω es la parte interior del cilindro que yace dentro de $x^2+y^2+z^2=4$, que es una esfera de radio 2. La proyección de Ω sobre el plano xy es $D = x^2+(y-a)^2 \leq a^2$. Para un punto $(x,y) \in D$ fijo, z varía entre $-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ y $\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$. Se tiene pues

$$V = \iint_D \int_{-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dzdxdy$$

Cambiando a coordenadas cilíndricas (r,θ,z), se tiene $dzdxdy = rdrd\theta dz$,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta \\ &= 2\iint_D r\sqrt{4-r^2 rdrd\theta} \end{aligned}$$

Queda por escribir la integral sobre D. Sustituyendo polares en la ecuación de la circunferencia borde de D da $r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2ar\operatorname{sen}\theta = 0$, o sea $r = 2a\operatorname{sen}\theta$, después de dividir por r, que no pierde nada. ($r=0$ corresponde al origen). Así pues, para θ fijo, ($r\theta$) dentro de D permite r variar entre 0 y $2\operatorname{sen}\theta$. Mirando el dibujo, se ve que θ varía entre 0 y π. Así

$$\begin{aligned} V &= 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} r\sqrt{4a^2-r^2 dr} \\ &= \frac{-2}{3}\int_0^{\pi}(8a^3\left|\cos\theta\right|^3 - 8a^3)d\theta \end{aligned}$$

Se llama la atención al signo del valor absoluto. La razón es que, al hacer la integral en r, hay que tomar el valor $positivo$ de $\sqrt{\cos^6\theta}$. Continuando,

$$V = \frac{-16}{a^3}\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta d\theta\right)$$

lo que finalmente da $\dfrac{16a^3}{3}\left(\pi - \dfrac{4}{3}\right)$.
Una primitiva de $\cos^3\theta = \cos\theta\cdot(1-\operatorname{sen}^2\theta) = \cos\theta - \cos\theta\cdot\operatorname{sen}^2\theta$.
Errores comunes:

- La trampa de tener que poner $|\cos^3|$ y no simplemente $\cos^3$.
- No saber integrar cos^3.
- Equivocaciones con los límites. También, en muchos casos faltaron explicaciones de como se determinaron dichos límites.

3. Si Ω está definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, y si la densidad de masa $\delta(x,y,z) = z$, halle la masa de Ω.
SOLUCIÓN: La masa es $M = \iiint_\Omega zdV$. Se nota que $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$ es la región $interior$ del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Para verificar esto, es solamente necesario verificar que para *un solo punto* del interior se cumple $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$. Cualquier punto del eje real positivo hace ver esto de inmediato.
Puesto que $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ es una esfera de radio $2a$, centro de origen, la región Ω es la parte del interior del como yace dentro de la esfera. Esto sugiere cambiar a coordenadas esféricas, $z = \rho\cos\phi$, $x = \rho\cos\theta\operatorname{sen}\phi$, $y = \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi$, con elemento de volumen $dV = \rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi$. La masa queda
$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho\cos\phi\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi$$
que se evalúa fácilmente a 2π.
Errores comunes:
   - Tomar el exterior del cono.
   - Equivocarse en los límites
   - No explicar los límites.

4. (Falta el dibujo). Se muestra σ una curva simple en el primer cuadrante del plano xy, que une el punto $(A,0)$ con el punto $(0,B)$. La región D es la región encerrada por σ y los ejes de coordenadas. Si se sabe que Área (D) = 1/2 la densidad de masa es 1 y el centro de masa es (a,b), exprese $\int_\sigma xydx + ydy$ en términos de a, b, A, B.
SOLUCIÓN: La región D tiene borde δD que consta de la curva $sigma$, la porción del eje x entre el origen y $(A,0)$-la llamamos r, y la porción del eje y entre el origen y (0,B)-la llamamos μ. Al borde se le asigna orientación anti-horaria. Las funciones $P = xy$, $Q = y$ son C^1 en todo R^2, así pues se aplica el teorema de Green al campo vectorial $(P;Q)$ y $D, \delta D$:
$$\int_{\delta D} Pdx + Qdy = \iint_D \frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}dxdy \qquad (1)$$
Se tiene $Q_x = 0$, $P_y = x$. Así pues el lado derecho de 1 resulta ser $\iint_D -xdxdy$. Pero la x-coordenada $\bar{x}$ del centro de masa de D viene dada por $\bar{x}M = \iint_D xdxdy$, donde M es la masa de D. Puesto que D tiene densidad 1, M es igual al área de D. Usando los datos pues $\iint_D -xdxdy = -a/2$.
El lado derecho de 1 es
$$\int_{\delta D} Pdx + Qdy = \int_\sigma Pdx + Qdy + \int_\tau Pdx + Qdy + \int_\mu Pdx + Qdy$$
La primera integral es la buscada. El camino τ está parametrizado por $y = 0,\ 0 \leq x \leq A$ y $P = Q = 0$ en τ; por consiguiente la segunda integral es 0. El camino μ es parametrizado

por $x = 0,\ B \geq y \geq 0$ y la tercera integral es $\int_B^0 y dy = -B^2/2$. Despejando en 1, la integral buscada resulta $B^2/2 - a/2$.

Errores comunes

- Error casi universal: Olvidar que Green se aplica a regiones de borde una curva simple *cerrada*. Así se olvidó de las integrales sobre los caminos τ y μ.
- Aplicar Green sin verificar que la condición C^1 en el conjunto relevante se satisface.
- Cálculos que mostraron poco entendimiento del concepto de integral de línea.